Esame di GEOMETRIA A - prof. Lucia Alessandrini - 24.1.2007

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Siano r la retta di equazione: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+3z-1=0 \end{cases}$ e s la retta di equazione: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=3+4t \end{cases}$.

r e s sono (mutua posizione) $\boxed{}$. Un piano perpendicolare a s e passante per $(1,2,-1)$ è $\boxed{}$. Un piano parallelo a r e passante per $(1,2,-1)$ e per $(0,-2,0)$ (se esiste) è $\boxed{}$.

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, e siano L_A e L_B le applicazioni lineari associate alle matrici A e B.

$(L_B \, o \, L_A)(x,y,z) = \boxed{}$ $L_B^{-1}(x,y) = \boxed{}$

$L_A^{-1}(1,-1) = \boxed{}$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $AA^T = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$.

Gli autovalori di A sono $\boxed{}$. I valori di k per cui A è invertibile sono $\boxed{}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) (F) $x^2+y^2-z=0$ è un paraboloide ellittico.

(V) (F) Se $v_1,\dots,v_n$ sono vettori linearm. indipendenti, $v_2,\dots,v_n$ sono lin. indipendenti.

(V) (F) $tr(A+B) = trA + trB$.

(V) (F) $dist((1,1,0,0),(-1,0,-1,0)) = 1$.

(V) (F) Se A e B sono matrici simmetriche, anche $AB+BA$ lo è.

(V) (F) Un operatore rappresentato da una matrice simmetrica è sempre diagonalizzabile.

(V) (F) Se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una applicazione lineare iniettiva, allora è anche suriettiva

(V) (F) Se $v,w \in \mathbb{R}^n$, vale $||v-w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 - 2\langle v,w\rangle$.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. Sia T un operatore su $\mathbb{R}^n$ tale che $T \circ T = O$. Dimostrare che zero è l'unico autovalore di T.

2. Considerare il sistema $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ 7x+4y+5z=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$. Dire se il sistema è risolubile, e poi eventualmente risolverlo.

Esame di GEOMETRIA A - prof. Lucia Alessandrini - 21.2.2007

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Siano r la retta di equazione: $\begin{cases} y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ e s la retta di equazione: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$.

   r e s sono (mutua posizione) $\boxed{}$. Un'equazione parametrica per una retta parallela all'asse y e incidente sia r che s (se esiste) è $\boxed{}$.

   $dist((1,2,3),(-1,-2,0)) = \boxed{}$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^3 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$.

   Gli autovalori di A sono $\boxed{}$. $rgA = \boxed{}$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e sia L l'applicazione lineare associata ad A.

   $KerL = \boxed{}$

   $L^2(x,y) = \boxed{}$ $\langle L(0,2),(0,2)\rangle = \boxed{}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) (F) Due piani incidenti possono avere vettori normali tra loro perpendicolari.

(V) (F) $y^2+z^2=1$ è l'equazione di una sfera.

(V) (F) Ogni sistema lineare con più incognite che equazioni è risolubile.

(V) (F) Se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, allora $v_1 \neq v_2 - v_3$.

(V) (F) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango tre.

(V) (F) Se L è un operatore con matrice A, allora L è un isomorfismo $\iff detA \neq 0$.

(V) (F) L'operatore rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

(V) (F) L'angolo fra $(1,2,1)$ e $(0,-1,-1)$ è maggiore di $\pi/2$.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. Siano $\mathcal{B} = ((1,-1),(2,3))$ e $\mathcal{B}' = ((-4,1/2),(0,2))$ basi di $\mathbb{R}^2$. Calcolare $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ e $M(\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e sia T l'operatore associato ad A.

   a) Determinare i valori di k per cui T è un isomorfismo.

   b) Determinare i valori di k per cui T ha un solo autovalore (di molteplicità due).

Esame di GEOMETRIA A - prof. Lucia Alessandrini - 18.6.2007

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Siano r la retta di equazione: $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$ e $P = (3, 1, 0)$.

Un piano contenente r e P è $\boxed{\quad}$. Un'equazione parametrica per una retta s parallela a r e passante per P (se esiste) è $\boxed{\quad}$.

Un piano perpendicolare a r e passante per $(0, 0, 1)$ è $\boxed{\quad}$.

2. Considerare i vettori $v = (0, 2, -1), w = (-1, -1, 0), u = (0, 3, 3)$.
L'area del triangolo di vertici O, v, w è $\boxed{\quad}$. $\langle v \times w, u\rangle = \boxed{\quad}$.
Il determinante della matrice che ha come colonne v, w, u è $\boxed{\quad}$.

3. Considerare il sistema $\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$. La matrice ridotta a scala è $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$.

L'insieme delle sue soluzioni è $\boxed{\quad}$. E' possibile mettere dei termini noti non tutti nulli di modo che il sistema abbia soluzione unica? $\boxed{\quad}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) (F) $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 0$ è un'ellissoide.

(V) (F) Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono basi di $\mathbb{R}^n$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ vale $[v]_{\mathcal{B}} = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')[v]_{\mathcal{B}'}$.

(V) (F) L'intersezione di tre piani non può essere una retta.

(V) (F) Se A è una matrice antisimmetrica, $trA = 0$.

(V) (F) La rotazione di angolo $\pi/3$ è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

(V) (F) Se L è una applicazione lineare di matrice A, allora $ImL = Sol(A, O)$.

(V) (F) Se $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è una applicazione lineare, $L(kv) = kL(v)\ \forall k \in \mathbb{R},\ \forall v \in \mathbb{R}^3$.

(V) (F) Ogni operatore ha un autovettore di norma uno.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare.
a) Dimostrare che $Ker\ L \subset Ker\ L^2$.
b) Dimostrare che $Ker\ L^2 \subset Ker\ L^3$.

2. Scrivere, se possibile, $(0, 0, 0, 1)$ come combinazione lineare dei vettori $(0, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)$. Se è possibile, i coefficienti sono unici? Giustificare le risposte.

Esame di GEOMETRIA A - prof. Lucia Alessandrini - 9.7.2007

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Sia r la retta di equazione cartesiana: $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$. I punti di r che hanno distanza 4 dall'origine sono $\boxed{\quad}$. L'equazione cartesiana di una retta s parallela sia a r che all'asse delle z (se esiste) è $\boxed{\quad}$. Un piano perpendicolare a r e passante per $(-2,-2,0)$ è $\boxed{\quad}$.

2. Considerare i vettori $v=(1,-1,2), w=(0,1,-1)$.
$\{v,w\}^\perp = \boxed{\quad}$
$\cos \hat{vw} = \boxed{\quad}$
$pr_w v - pr_v w = \boxed{\quad}$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$, siano P una matrice invertibile e D una matrice diagonale tali che $D = P^{-1}AP$. Allora:

$$P = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) (F) $\{(x,y,z)/x+y=0, y+z=0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

(V) (F) L'area del parallelogramma di vertici $O, v, w, v-w$, con $v=(1,0,-1)$ e $w=(-1,0,-1)$, è maggiore di uno.

(V) (F) Se due rette sono parallele, non possono giacere sullo stesso piano.

(V) (F) $x^2+y^2-z=1$ è l'equazione di un cono.

(V) (F) Se $A, B \in M_{n\times n}$, vale $rg(AB) = rgA \cdot rgB$.

(V) (F) λ è un autovalore dell'operatore $T \iff Ker(T-\lambda id)$ contiene un vettore non nullo.

(V) (F) Se $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una applicazione lineare iniettiva, deve essere $n=1$.

(V) (F) Il sistema $Ax=b$ è risolubile $\iff rgA = rg(A,b)$.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. Determinare equazioni cartesiane per $\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$, dove $v_1=(1,-3,1/2), v_2=(1/2,6,0), v_3=(0,-15,1/2)$.

2. Dimostrare che la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ ha zero come autovalore.

Esame di GEOMETRIA A - prof. Lucia Alessandrini - 3.9.2007

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Sia r la retta di equazione cartesiana: $\begin{cases} y+z-2=0 \\ x+y+3z-4=0 \end{cases}$ e α il piano di equazione $x-z-9=0$.

La mutua posizione di r e α è ______. L'equazione parametrica di una retta passante per l'origine, perpendicolare a r e parallela ad α (se esiste) è ______.
L'equazione parametrica di una retta passante per l'origine, perpendicolare a α e parallela a r (se esiste) è ______.

2. Considerare i vettori $v = (1, -1, 3, -3, 0), w = (2, 4, 6, 8, 10), u = (1, 2, 3, 4, 5)$.
Se $u = av + bw$, $(a, b) =$ ______. La matrice che ha come colonne v, w, u ha rango ______.
$2v - \langle u, v\rangle w =$ ______.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $AA^T = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

Gli autovalori di A sono ______.

L'autospazio dell'autovalore maggiore è ______.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) (F) Ogni matrice diagonale è ortogonale.

(V) (F) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 5y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

(V) (F) Due rette sghembe non possono intersecare uno stesso piano.

(V) (F) $pr_w v = w \iff v = w$.

(V) (F) v e w sono linearmente dipendenti $\iff av + bw = O \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

(V) (F) Se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una applicazione lineare iniettiva, allora $dim Im L = n$.

(V) (F) Un sistema lineare con tre equazioni e due incognite non ha soluzione.

(V) (F) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ è un iperboloide a una falda.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione $L(x, y) = (x - 3y, -x - 2y, -3x + 6y)$.
a) Dimostrare che L è lineare.
b) Calcolare $Ker L$ e $Im L$.

2. Siano v_1, v_2, v_3 vettori di $\mathbb{R}^3$ non nulli, con $v_1 \perp v_2, v_1 \perp v_3, v_2 \perp v_3$. Dimostrare che essi sono linearmente indipendenti.

Esame di GEOMETRIA A - prof. Lucia Alessandrini - 17.9.2007

Scrivere la risposta negli spazi, senza giustificarla.

1. Siano r la retta di equazione: $\begin{cases} -x+y=5 \\ x+y=-5 \end{cases}$ e s la retta di equazione: $\begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$.

La distanza di $(1,2,-3)$ dall'intersezione $r\cap s$ è $\boxed{\quad}$. Un piano perpendicolare a s e passante per $(1,2,-3)$ è $\boxed{\quad}$. Un'equazione parametrica per una retta perpendicolare a r e passante per $(1,2,-3)$ è $\boxed{\quad}$.

2. Considerare i vettori $v=(1,-1,0,\sqrt{2}), w=(0,2,-1,1)$.

$\{v,w\}^{\perp}=\boxed{\quad}$

$\cos\hat{vw}=\boxed{\quad}$ $pr_w v=\boxed{\quad}$.

3. Sia $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $L(e_1)=(0,2,3), L(e_2)=(2,-5,0), L(e_3)=(-1,4,-6)$. L è suriettiva? $\boxed{\quad}$ $(L\circ L)(x,y,z)=\boxed{\quad}$

$Ker(L-id)=\boxed{\quad}$.

Se l'affermazione è vera, fare una croce su (V), se è falsa, su (F)

(V) (F) Se $detA\neq 0$ e P è invertibile, allora $P^{-1}AP$ è invertibile.

(V) (F) Se $v_1,\ldots,v_n$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e T è un operatore, allora $T(v_1),\ldots,T(v_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

(V) (F) $x^2+y^2-z^2=0$ è l'equazione di un cono.

(V) (F) La matrice di una rotazione è invertibile.

(V) (F) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale.

(V) (F) W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n \iff \forall w_1,w_2\in W$, anche $w_1+w_2\in W$

(V) (F) Se $v,w\in\mathbb{R}^3$ con $v\perp w$, allora $v\times w=O$.

(V) (F) Se $v\in\mathbb{R}^n$ e $v\perp e_j\ \forall j$, allora $v=O$.

Risolvere per esteso sul retro di questo foglio.

1. Calcolare autovalori e autovettori di $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. E' possibile diagonalizzare A? Se sì, è possibile che la matrice diagonale abbia un unico elemento diverso da zero? Giustificare le risposte.

2. Determinare $Sol(A,O)$, con $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t & 0 & -1 \end{pmatrix}$, al variare di $t\in\mathbb{R}$.